JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 54, 67–91 (1988)

Une caractérisation des polynômes strictement $1/p$ orthogonaux de type Scheffer. Étude du cas $p=2$

A. BOUKHEMIS ET P. MARONI

Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire d'Analyse Numérique (U.A. 189), Tour 55–65 — 5ème étage, 4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

Communicated by V. Totik

Received March 22, 1985; revised February 24, 1986

INTRODUCTION

Les récurrences d'ordre supérieur à deux, interviennent dans la définition des fonctions continues généralisées [1]. En particulier, les récurrences d'ordre supérieur à deux vérifiées par des suites de polynômes représentent les meilleurs approximants de Padé vectoriels [2] ou simultanés [3].

Il est donc intéressant d'étudier dans quelles conditions une suite de polynômes définie par une fonction génératrice de type à zéro, strictement $1/p$ ($p \geqslant 2$) orthogonale vérifie une récurrence d'ordre $(p+1)$

$$P_{n+p+1}(x) = (x-\beta_{n+p})\,P_{n+p}(x) - \sum_{\nu=0}^{p-1} \gamma_{n+p-\nu}^{(p-1-\nu)}\,P_{n+p-1-\nu}(x), \qquad n \geqslant 0 \tag{R1}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{gathered} P_0(n) = 1, \qquad P_1(x) = x - \beta_0 \\ P_q(x) = (x-\beta_{q-1})\,P_{q-1}(x) - \sum_{\mu=0}^{q-2} \gamma_{q-1-\mu}^{p-1-\mu} P_{q-2-\mu}(x), \qquad 2 \leqslant q \leqslant p. \end{gathered} \tag{R2}$$

Si $\mathscr{L}$ est la forme linéaire canonique associée à la suite $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$, c'est-à-dire telle que:

$$\mathscr{L}(1) = 1, \qquad \mathscr{L}(P_n) = 0 \qquad n \geqslant 1 \tag{R3}$$

on a la propriété suivante [6]:

$$\mathscr{L}(P_n P_m) = 0, \qquad n \geqslant mp+1,\ m \geqslant 0. \tag{R4}$$

0021-9045/88 \$3.00

On dit qu'une suite $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$, vérifiant (R4) est $1/p$ orthogonale; si de plus elle vérifie:

$$\mathscr{L}(P_n P_{pn}) \neq 0 \qquad n \geqslant 0 \tag{R5}$$

on dit qu'elle est strictement $1/p$ orthogonale.

Une suite vérifiant (R1), (R2) et telle que $\gamma_n^0 \neq 0$ pour tout $n \equiv 1[p]$, est strictement $1/p$ orthogonale [6].

Réciproquement, une suite de polynômes strictement $1/p$ orthogonale étant donnée, par exemple à l'aide d'une fonction génératrice, vérifie-t-elle nécessairement une récurrence d'ordre $(p+1)$?

On démontre dans le paragraphe 3 de la première partie que la réponse est négative. Pour cela, on considère des suites de polynômes strictement $1/p$ orthogonales de type A zéro [7]. C'est-à-dire définies à l'aide d'une fonction génératrice de la forme:

$$G(x, t) = A(t)\, e^{xH(t)} = \sum_{n\geqslant 0} P_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{R6}$$

Pour démontrer ce résultat, on se base sur une caractérisation des suites de polynômes strictement $1/p$ orthogonales en général, puis sur une caractérisation de ces suites qui sont en plus de type A zéro.

Par contre, la seconde partie sera consacrée à l'étude des suites strictement demi-orthogonales de type A zéro vérifiant soit une récurrence d'ordre trois ou une récurrence d'ordre quatre, en mettant en évidence toutes les suites demi-orthogonales de type A zéro et en citant d'autres résultats extraits de [8].

I. Une caractérisation des polynômes strictement $1/p$ $(p \geqslant 2)$ orthogonaux de type A zéro

0. *Soit* $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ *une suite de polynômes normalisés*

$$P_n(x) = x^n + \sum_{v=0}^{n-1} P_{n,v}\, x^v \tag{I.0.1}$$

définis par la fonction génératrice

$$G(x, t) = \sum_{n\geqslant 0} c_n P_n(x)\, t^n; \qquad c_n \neq 0, n \geqslant 0 \tag{I.0.2}$$

et soit $\mathscr{L}$ la forme linéaire associée à la suite $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ et définie par:

$$\mathscr{L}(1) = \alpha_0, \qquad \mathscr{L}(P_n) = 0, \qquad n \geqslant 1 \tag{I.0.3}$$

et considérons la fonction:

$$R(s,t)=\mathscr{L}\left(\frac{G(s,t)}{1-sx}\right). \tag{I.0.4}$$

LEMME I.0.1. *Si la suite* $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ *est définie par* (I.0.2), *alors on a la relation*:

$$\phi_m(t)=\sum_{n\geqslant 0} r_{m,n}t^n=\sum_{n\geqslant 0}\alpha_{n+m}\mathscr{C}_n(t), \qquad m\geqslant 0 \tag{I.0.5}$$

où

$$r_{m,n}=c_n\mathscr{L}(x^m P_n(x)), \qquad m\geqslant 0, n\geqslant 0 \tag{I.0.6}$$

$$\alpha_n=\mathscr{L}(x^n), \qquad n\geqslant 0 \tag{I.0.7}$$

et

$$\mathscr{C}_n(t)=\sum_{k\geqslant n} c_k P_{k,n}t^k. \tag{I.0.8}$$

DÉMONSTRATION. D'après (I.0.2) et (I.0.4), on a:

$$R(s,t)=\mathscr{L}\left(\sum_{m\geqslant 0}(sx)^m G(x,t)\right)=\sum_{m\geqslant 0}s^m\mathscr{L}\left(x^m\sum_{n\geqslant 0}c_nP_n(x)\,t^n\right)$$

$$=\sum_{m\geqslant 0}s^m\sum_{n\geqslant 0}c_n\,\mathscr{L}(x^mP_n(x))\,t^n$$

c'est-à-dire

$$R(s,t)=\sum_{m,n\geqslant 0}r_{m,n}s^mt^n. \tag{I.0.9}$$

De même d'après (I.0.1) et (I.0.2) on peut toujours écrire:

$$G(x,t)=\sum_{n\geqslant 0}\mathscr{C}_n(t)\,x^n$$

soit:

$$R(s,t)=\mathscr{L}\left(\frac{1}{1-sx}\sum_{n\geqslant 0}\mathscr{C}_n(t)\,x^n\right)=\sum_{n\geqslant 0}\mathscr{C}_n(t)\,\mathscr{L}\left(\frac{x^n}{1-sx}\right)$$

$$=\sum_{n\geqslant 0}\mathscr{C}_n(t)\,\mathscr{L}\left(x^n\sum_{m\geqslant 0}(sx)^m\right)=\sum_{n\geqslant 0}\mathscr{C}_n(t)\sum_{m\geqslant 0}\alpha_{n+m}s^m$$

c'est-a-dire

$$R(s, t) = \sum_{m \geqslant 0} \phi_m(t)\, s^m \tag{I.0.10}$$

soit en comparant (I.0.9) et (I.0.10) on obtient la relation recherchée. (*)

LEMME I.0.2. *$\phi_0(t)$ vérifie les propriétés suivantes:*

$$\phi_0(t) = c_0 \alpha_0, \tag{I.0.11}$$

et la suite des moments $\{\alpha_n\}_{n \geqslant 0}$ de la forme $\mathscr{L}$ est déterminée à partir de α_0 par l'équation

$$\phi_0(t) = \textit{constante}.$$

DÉMONSTRATION. Les conditions (I.0.3) impliquent que:

$$r_{0,n} = 0, \qquad n \geqslant 1$$

soit

$$\phi_0(t) = r_{0,0} = c_0 \alpha_0$$

d'où (I.0.11).

Si $\phi_0(t) = \text{constante}$ c'est-à-dire

$$\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n \mathscr{C}_n(t) = \text{constante},$$

ce qui détermine parfaitement les moments α_n de la forme $\mathscr{L}$ à partir de α_0. (*)

1. *Caractérisation des polynômes strictement $1/p$ $(p \geqslant 2)$ orthogonaux*

DÉFINITION I.1.1. Soit $\mathscr{L}$ une forme linéaire définie sur l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{C}$ et soit un entier fixe p $(p \geqslant 2)$. Une suite $\{P_n(x)\}_{n \geqslant 0}$ de polynômes est dite strictement $1/p$ orthogonale relativement à $\mathscr{L}$ si elle vérifie les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}(x^m P_n(x)) = 0 \qquad n \geqslant mp + 1, m \geqslant 0 \\ &\mathscr{L}(x^n P_{np}(x)) \neq 0 \qquad n \geqslant 0. \end{aligned} \tag{I.1.2}$$

On peut maintenant caractériser les suites strictement $1/p$ $(p \geqslant 2, p\text{:fixe})$ orthogonales:

THÉORÈME I.1.3. *La suite* $\{P_n(x)\}$ *donnée par* (I.0.1) *et* (I.0.2) *est une suite strictement* $1/p$ *orthogonale par rapport à* $\mathscr{L}$ *dont les moments sont déterminés par* (I.0.11) *si et seulement si chaque* $\phi_m(t)$ *défini par* (I.0.5) *est un polynôme de degré pm exactement.*

Démonstration. Supposons que la suite $\{P_n(x)\}$ définie par (I.0.2) est une suite strictement $1/p$ orthogonale relativement à $\mathscr{L}$. Alors d'après (I.1.3) on a:

$$\begin{aligned} r_{m,n} &= 0 \qquad n \geqslant mp+1,\, m \geqslant 0 \\ r_{m,pm} &\neq 0 \qquad m \geqslant 0 \end{aligned} \tag{I.1.4}$$

et ainsi d'après (I.0.12):

$$\phi_m(t) = \sum_{n=0}^{pm} r_{m,n} t^n, \qquad r_{m,pm} \neq 0,\, m \geqslant 0.$$

Réciproquement, soit $\{P_n(x)\}$ une suite de polynômes donnée par (I.0.2) et telle que chaque $\phi_m(t)$ donnée par (I.0.5) soit un polynôme de degré mp exactement pour tout $m \geqslant 0$.

En particulier, la condition $\phi_0(t) = \text{const} \neq 0$, détermine parfaitement la suite $\{\alpha_n\}$ et par conséquent une forme linéaire $\mathscr{L}$ définie par (I.0.7). L'hypothèse implique (I.1.4), c'est-à-dire (I.1.2) d'après (I.0.6). (*)

Remarque I.1.4. La démonstration précédente est purement formelle; il est facile de la justifier, en introduisant les sommes partielles suivantes:

$$\begin{aligned} G_k(x, t) &= \sum_{n=0}^{k} c_n P_n(x)\, t^n \\ R_{kq}(s, t) &= \mathscr{L}\left(G_k(x, t) \sum_{n=0}^{q} (xs)^m \right), \qquad q > k. \end{aligned}$$

Ainsi:

$$G_k(x, t) = \sum_{n=0}^{k} \mathscr{C}_{nk}(t)\, x^n.$$

Si on pose:

$$\phi_{mk}(t) = \sum_{n=0}^{k} \alpha_{n+m} \mathscr{C}_{nk}(t), \qquad 0 \leqslant m \leqslant q$$

alors les conditions (I.1.2) impliquent que $\phi_{mk}(t)$ est un polynôme de degré mp exactement pour $m = 0, 1, \ldots, q$. Réciproquement, on remarque que la condition $\phi_{0k}(t) = \text{const}$, fournit les mêmes relations de récurrence pour $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_q$ que la condition (I.0.11). Puisque k est quelconque, la suite $\{\alpha_n\}$ est alors parfaitement déterminée à partir de α_0.

Appliquons maintenant ce résultat général, pour étudier les suites de polynômes strictement $1/p$ $(p \geqslant 2)$ orthogonales définies à l'aide d'une fonction génératrice de A type zéro.

2. *Caractérisation des suites de polynômes strictement $1/p$ $(p \geqslant 2,\ p : \text{fixe})$ orthogonales définies par une fonction génératrice de A type zéro*

DÉFINITION I.2.1. Une suite $\{P_n(x)\}_{n \geqslant 0}$ de polynômes est dite de type A zéro, si elle est définie à l'aide d'une fonction génératrice de la forme:

$$G(x, t) = A(t)\, e^{xH(t)} = \sum_{n \geqslant 0} P_n(x) \frac{t^n}{n!} \tag{I.2.1}$$

où

$$A(t) = \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n; \qquad H(t) = \sum_{n \geqslant 1} h_n t^n \qquad (a_0 h_1 \neq 0). \tag{I.2.2}$$

Dans ce paragraphe, on donne une caractérisation des suites de polynômes $\{P_n(x)\}_{n \geqslant 0}$, strictement $1/p$ orthogonales à l'aide de deux équations différentielles, vérifiées respectivement par les fonctions A et H.

Notons par J la fonction réciproque de H, soit

$$J(H(t)) = t.$$

Ici, avec les notations du paragraphe 0, on a:

$$\mathscr{C}_n(t) = A(t) \frac{H^n(t)}{t!} \qquad n \geqslant 0 \tag{I.2.3}$$

$$\phi_m(t) = A(t) \sum_{n \geqslant 0} \alpha_{n+m} \frac{H^n(t)}{n!} \qquad m \geqslant 0 \tag{I.2.4}$$

et, d'après le théorème (I.1.3), on a aussi:

$$\phi_m(t) = \sum_{n=0}^{pm} r_{m,n} t^n, \qquad r_{m,pm} \neq 0, m \geqslant 0. \tag{I.2.5}$$

Soit, en identifiant, on aura:

$$\sum_{n=0}^{pm} r_{m,n} J^n(u) = A(J(u)) \sum_{n \geqslant 0} \alpha_{n+m} \frac{u^n}{n!} \qquad m \geqslant 0. \tag{I.2.6}$$

En posant

$$B(u) = \sum_{n \geqslant 0} \alpha_n \frac{u^n}{n!} \tag{I.2.7}$$

alors de (I.2.6), on a:

$$B(u) = \frac{r_{0,0}}{A(J(u))}. \tag{I.2.8}$$

On peut toujours supposer $r_{0,0} = 1$, cela revient à considérer une forme linéaire $\mathscr{L}$ normalisée ($\mathscr{L}(1) = 1$).

LEMME I.2.2. *Si la suite $\{P_n(x)\}$ donnée par* (I.2.1) *est strictement* $1/p$ *orthogonale, alors les fonctions B et J vérifient nécessairement*:

$$\frac{B'(u)}{B(u)} = S_P(J(u)) \tag{I.2.9}$$

où

$$S_p(t) = \sum_{n=0}^{p} r_{1,n} t^n, \qquad r_{1,p} \neq 0 \tag{I.2.10}$$

et

$$J'(u)\left(\sum_{n=0}^{p-1} (n+1)\, r_{1,n+1} t^n\right) = R_{2p}(t) \tag{I.2.11}$$

où

$$R_{2p}(t) = \sum_{n=0}^{2p} r_{2,n}\, t^n - S_p^2(t), \qquad r_{2,2p} \neq 0. \tag{I.2.12}$$

Démonstration. D'après la définition de B et la relation (I.2.6) on a pour $m = 1$

$$\sum_{n=0}^{p} r_{1,n}\, J^n(u) = \frac{1}{B(u)} \sum_{n \geqslant 0} \alpha_{n+1} \frac{u^n}{n!}$$

et d'après (I.2.7), on a:

$$B'(u) = \sum_{n \geqslant 0} \alpha_{n+1} \frac{u^n}{n!},$$

d'où

$$\frac{B'(u)}{B(u)}=\sum_{n=0}^{p} r_{1,n} J^n(u)=S_p(J(u))$$

d'où (I.2.9) et (I.2.10).

Pour $m=2$, on a d'après (I.2.6)

$$\sum_{n=0}^{2p} r_{2,n} J^n(u)=\frac{1}{B(u)}\sum_{n\geqslant 0}\alpha_{n+2}\frac{u^n}{n!}$$

comme $\sum_{n\geqslant 0}\alpha_{n+2}(u^n/n!)=B''(u)$, alors

$$\frac{B''(u)}{B(u)}=\sum_{n=0}^{2p} r_{2,n} J^n(u)$$

soit en dérivant (I.2.9), et en remplaçant $B''(u)/B(u)$, on a:

$$J'(u)\sum_{n=0}^{p-1}(n+1)\, r_{1,n+1} J^n(u)=\sum_{n=0}^{2p} r_{2,n} J^n(u)-S_p^2(J(u))=R_{2p}(J(u))$$

d'où les relations (I.2.11) et (I.2.12). (*)

Réciproquement, supposons que les fonctions J et B vérifient respectivement les équations différentielles suivantes:

$$J'(u)\, S_p'(J(u))=R_{2p}(J(u)) \tag{I.2.13}$$

$$\frac{B'(u)}{B(u)}=S_p(J(u)); \qquad B(0)=1 \tag{I.2.14}$$

où

$$S_p(t)=\sum_{n=0}^{p}\sigma_n t^n, \qquad \sigma_p\neq 0 \tag{I.2.15}$$

$$R_{2p}(t)=\sum_{n=0}^{2p}\rho_n t^n \tag{I.2.16}$$

on suppose de plus que:

$$\rho_{2p}+\sigma_p^2\neq 0. \tag{I.2.17}$$

Ces conditions sont-elles suffisantes pour assurer que $\phi_m(t)$, donnée par (I.2.4) soit un polynôme de degré mp exactement?

On a:

$$\phi_0(t)=A(t)\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n\frac{H^n(t)}{n!}=A(t)\, B(H(t))=1.$$

Ainsi, $\phi_0(t)$ est un polynôme de degré 0, d'après la relation (I.2.8), la suite $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$, étant déterminée par (I.2.7).

D'autre part de la relation (I.2.4) on a:

$$\phi_m(J(u))=\frac{d}{du}\phi_{m-1}(J(u))+S_p(J(u))\,\phi_{m-1}(J(u)),\qquad m\geqslant 1\quad\text{(I.2.18)}$$

également

$$\phi_m(J(u))=\frac{B^m(u)}{B(u)},\qquad m\geqslant 0.\qquad\text{(I.2.19)}$$

Ainsi pour $m=1$, on a de (I.2.18):

$$\phi_1(J(u))=S_p(J(u)),$$

c'est-à-dire $\phi_1(t)=S_p(t)$. La fonction $\phi_1(t)$ est donc bien un polynôme de degré p.

Lorsque $m=2$, on a toujours de (I.2.18):

$$\phi_2(J(u))=\frac{d}{du}\phi_1(J(u))+S_p(J(u))\,\phi_1(J(u))$$

mais, $d/du\ \phi_1\ (J(u))=d/du\ S_p\ (J(u))=J'(u)\,S_p'(J(u))=R_{2p}(J(u))$ soit:

$$\phi_2(t)=R_{2p}(t)+S_p(t)\,\phi_1(t)=R_{2p}(t)+S_p^2(t).$$

C'est bien un polynôme de degré $2p$ exactement, en vertu de l'hypothèse (I.2.17).

Lorsque $m=3$, on a:

$$\phi_3(J(u))=\frac{d}{du}\phi_2(J(u))+S_p(J(u))\,\phi_2(J(u)),$$

or

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\phi_2(J(u))&=\frac{d}{du}\left(R_{2p}(J(u))+S_p^2(J(u))\right)\\&=J'(u)\{R_{2p}'(J(u))+2S_p(J(u))\,S_p'(J(u))\}\\&=\frac{R_{2p}(J(u))\cdot R_{2p}'(J(u))}{S_p'(J(u))}+2S_p(J(u))\,R_{2p}(J(u))\end{aligned}$$

donc:

$$\phi_3(t)=\frac{R_{2p}(t)\,R_{2p}'(t)}{S_p'(t)}+3S_p(t)\,R_{2p}(t)+S_p^3(t).\qquad\text{(I.2.20)}$$

Ainsi, pour que ϕ_3 soit un polynôme, il faut et il suffit que la fraction rationelle, qui intervient au second membre le soit.

Deux cas sont possibles:

Premier cas.

$$R_{2p}(t) = S'_p(t) \sum_{\nu=0}^{p+1} \Theta_\nu t^\nu. \tag{I.2.21}$$

Dans ce cas, on a pour $\phi_3(t)$

$$\phi_3(t) = (R'_{2p}(t) + 3S'_p(t)\, S_p(t)) \sum_{\nu=0}^{p+1} \Theta_\nu t^\nu + S_p^3(t). \tag{I.2.22}$$

Le polynôme $\phi_3(t)$ est effectivement de degré $3p$ exactement lorsque:

$$\sigma_p^3 \left(\frac{\Theta_{p+1}}{\sigma_p} + \frac{1}{p}\right)\left(\frac{\Theta_{p+1}}{\sigma_p} + \frac{1}{2p}\right) \neq 0. \tag{I.2.23}$$

Dans ce cas l'équation différentielle (I.2.13) devient:

$$J'(u) = \sum_{\nu=0}^{p+1} \Theta_\nu J^\nu(u). \tag{I.2.24}$$

Où on est amené à prendre $\Theta_0 = 1$.

On montrera plus loin que les suites mises en évidence dans ce cas, vérifient une récurrence d'ordre $(p+1)$, et on étudiera dans quelles conditions ces suites sont strictement $1/p$ orthogonales.

Second cas.

$$R'_{2p}(t) = S'_p(t)\, \hat{S}_p(t) \tag{I.2.25}$$

où

$$\hat{S}_p(t) = \sum_{\nu=0}^{p} \chi_\nu t^\nu.$$

On obtient alors le système suivant:

$$(n+1)\,\rho_{n+1} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} (k+1)\,\sigma_{k+1}\chi_{n-k}, & 0 \leqslant n \leqslant p-1 \\ \sum_{k=0}^{2p-(n+1)} (n+k+1-p)\,\sigma_{n+k+1-p}\chi_{p-k}, & p \leqslant n \leqslant 2p-1. \end{cases} \tag{I.2.26}$$

Dans ce cas:

$$\phi_3(t) = R_{2p}(t)\, \hat{S}_p(t) + 3S_p(t)\, R_{2p}(t) + S_p^3(t).$$

Le polynôme ϕ_3 est effectivement de degré $3p$ exactement, lorsque:

$$\sigma_p\left(\frac{\chi_p}{2}+\sigma_p\right)(\chi_p+\sigma_p)\neq 0.$$

Traitons d'abord le second cas.
De (I.2.18), on a:

$$\phi_{m+1}(t)=\frac{R_{2p}(t)}{S'_p(t)}\,\phi'_m(t)+S_p(t)\,\phi_m(t), \qquad m\geqslant 0. \tag{I.2.27}$$

Dans l'hypothèse (I.2.25), pour que $\phi_{m+j}(t)$ soit un polynôme, il faut et il suffit que $\phi'_m(t)$ soit divisible par $S'_p(t)$. C'est-à-dire:

$$\phi'_m(t)=S'_p(t)\,\phi_{m,1}(t), \qquad m\geqslant 1 \tag{I.2.28}$$

alors

$$\phi_{m+1}(t)=R_{2p}(t)\,\phi_{m,1}(t)+S_p(t)\,\phi_m(t). \tag{I.2.29}$$

LEMME I.2.3. *Lorsque* (I.2.25) *est vérifiée, pour que* $\phi_m(t)$ *soit un polynôme pour chaque* $m\geqslant 1$, *il faut et il suffit que*:

$$\hat{S}'_p(t)=cS'_p(t). \tag{I.2.30}$$

Démonstration. On a

$$\phi_1(t)=S_p(t), \quad \text{donc} \quad \phi'_1(t)=S'_p(t) \quad \text{et} \quad \phi_{1,1}(t)=1$$
$$\phi_2(t)=R_{2p}(t)+S^2_{2p}(t), \quad \text{donc} \quad \phi'_2(t)=R'_{2p}(t)=2S_p(t)\,S'_p(t)$$

soit $\phi'_2(t)=S'_p(t)\,\phi_{21}(t)$ avec $\phi_{21}(t)=\hat{S}_p(t)+2S_p(t)$, il en résulte que:

$$\phi_3(t)=R_{2p}(t)\,\phi_{21}(t)+S_p(t)\,\phi_2(t)$$

est un polynôme et

$$\begin{aligned}\phi'_3(t)&=R'_{2p}(t)\,\phi_{21}(t)+R_{2p}(t)\,\phi'_{21}(t)+S'_p(t)\,\phi_2(t)+S_p(t)\,\phi'_2(t)\\&=S'_p(t)\{\hat{S}_p(t)\,\phi_{21}(t)+\phi_2(t)+S_p(t)\,\phi_{21}(t)\}+R_{2p}(t)\,\phi'_{21}(t)\end{aligned}$$

donc, $\phi'_3(t)$ est divisible par $S'_p(t)$ si et seulement si $\phi'_{21}(t)$ l'est, et celà est possible si et seulement si (I.2.30) est réalisée.

Dans ces conditions $\phi'_{21}(t)=(c+2)\,S'_p(t)$ et donc $\phi_{22}(t)=c+2$.

Procédons par récurrence, et supposons que:

$$\phi'_{m,r}(t)=S'_p(t)\,\phi_{m,r+1}(t), \qquad 0\leqslant r\leqslant m-1$$

avec $\phi_{m,0}(t)=\phi_m(t)$ et $\phi_{m,m}(t)=\text{constante}$, $\phi_{m,m+1}(t)=0$, $m\geqslant 0$. Alors de (I.2.29), on a:

$$\begin{aligned}\phi_{m+1}(t)&=S'_p(t)\,\hat{S}_p(t)\,\phi_{m,1}(t)+R_{2p}(t)\,\phi'_{m,1}(t)+S'_p(t)\,\phi_m(t)+S_p(t)\,\phi'_m(t)\\&=S'_p(t)\{\hat{S}_p(t)\,\phi_{m,1}(t)+R_{2p}(t)\,\phi_{m,2}(t)+\phi_m(t)+S_p(t)\,\phi_{m,1}(t)\}\end{aligned}$$

donc

$$\phi_{m+1,1}(t)=\phi_{m,0}(t)+(\hat{S}_p(t)+S_p(t))\,\phi_{m,1}(t)+R_{2p}(t)\,\phi_{m,2}(t)$$

supposons qu'on ait trouvé:

$$\phi_{m+1,r}(t)=a_r\phi_{m,r-1}(t)+(b_r\hat{S}_p(t)+S_p(t)\,\phi_{m,r}(t)+R_{2p}(t)\,\phi_{m,r+1}(t)\tag{I.2.31}$$

alors:

$$\begin{aligned}\phi'_{m+1,r}(t)&=a_r\phi'_{m,r-1}(t)+(cb_r+1)\,S'_p(t)\,\phi_{m,r}(t)+R'_{2p}(t)\,\phi_{m,r+1}(t)\\&\quad+(b_r\hat{S}_p(t)+S_p(t))\,\phi'_{m,r}(t)+R_{2p}(t)\,\phi'_{m,r+1}(t)\\&=S'_p(t)\{a_r\phi_{m,r}(t)+(cb_r+1)\,\phi_{m,r}(t)\\&\quad+(b_r\hat{S}_p(t)+S_p(t))\,\phi_{m,r+1}(t)+\hat{S}_p(t)\,\phi_{m,r+1}(t)\\&\quad+R_{2p}(t)\,\phi_{m,r+2}(t)\}\end{aligned}$$

donc:

$$\begin{aligned}\phi_{m+1,r+1}(t)&=(a_r+b_rc+1)\,\phi_{m,r}(t)+\{(b_r+1)\,\hat{S}_p(t)+S_p(t)\}\,\phi_{m,r+1}(t)\\&\quad+R_{2p}(t)\,\phi_{m,r+2}(t).\end{aligned}$$

Il en résulte que:

$$\begin{aligned}a_{r+1}&=a_r+cb_r+1 &&;a_1=1\\b_{r+1}&=b_r+1 &&;b_1=1\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}b_r&=r\\a_r&=1+(r-1)\left(1+\frac{c_r}{2}\right).\end{aligned}$$

Dans ces conditions, où $m=r$ la relation (I.2.31) nous donne:

$$\phi_{m+1,m}(t)=a_m\phi_{m,m-1}(t)+(m\hat{S}_p(t)+S_p(t))\,\phi_{m,m}(t),\tag{I.2.32}$$

d'où $\phi'_{m+1,m}(t) = S'_p(t)\{a_m\phi_{m,m}(t) + (mc+1)\ \phi_{m,m}(t)\}$ c'est-à-dire $\phi_{m+1,m+1}(t) = (a_m + cm + 1)\ \ \phi_{m,m}(t) = a_{m+1}\phi_{m,m}(t)$. Ainsi, chaque $\phi'_{m+1,r}(t)$, $0 \leqslant r \leqslant m$ est divisible par $S'_p(t)$ et $\phi_{m+1,m+1}(t) = \text{constante}$.

La propriété est donc démontrée. (*)

La condition (I.2.30), s'exprime alors par:

$$\chi_v = c\sigma_v, \qquad 1 \leqslant v \leqslant p \tag{I.2.33}$$

et le système (I.2.26) devient:

$$(n+1)\,\rho_{n+1} = \begin{cases} c\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,\sigma_{k+1}\sigma_{n-k} + (n+1)\,\sigma_{n+1}\chi_0, & 1 \leqslant n \leqslant p-1 \\ c\sum_{k=0}^{2p-(n+1)}(n+k+1)\,\sigma_{n+k+1-p}\sigma_{p-k}, & p \leqslant n \leqslant 2p-1 \end{cases} \tag{I.2.34}$$

et $\rho_1 = \sigma_1\chi_0$.

PROPOSITION I.2.4. *Lorsque $R'_{2p}(t) = S'_p(t)\,\hat{S}_p(t)$, chaque polynôme $\phi_m(t)$ est de degré pm exactement si et seulement si*

$$\sigma_p(cm+2) \neq 0, \qquad m \geqslant 1. \tag{I.2.35}$$

Démonstration. Notons par $\phi_m(t) = K_m t^{pm} + \cdots$ et $\phi_{m,1}(t) = K_{m,1} t^{p(m-1)} + \cdots$ d'où après la relation (I.2.28)

$$pmK_m = p\sigma_p K_{m,1} \qquad \text{soit} \qquad K_{m,1} = \frac{mK_m}{\sigma_p}$$

l'égalité (I.2.29) fournit alors:

$$K_{m+1} = \rho_{2p}\frac{mK_m}{\sigma_p} + \sigma_p K_m = \sigma_p K_m\left(1 + \frac{\rho_{2p}}{\sigma_p^2}\right)$$

soit aussi:

$$K_{m+1} = \tfrac{1}{2}\sigma_p(cm+2)\,K_m, \qquad m \geqslant 1.\ (*)$$

Revenons au premier cas:

PROPOSITION I.2.5. *Lorsque $R_{2p}(t) = S'_p(t)\sum_{v=0}^{p+1}\Theta_p t^v$, chaque polynôme $\phi_m(t)$ est de degré mp exactement si et seulement si*

$$\sigma_p\left(\frac{\Theta_{p+1}}{\sigma_p} + \frac{1}{pm}\right) \neq 0, \qquad m \geqslant 1. \tag{I.2.36}$$

Démonstration. On a de (I.2.18)

$$\phi_{m+1}(t)=\phi'_m(t)\sum_{v=0}^{p+1}\Theta_v t^v+S_p(t)\,\phi_m(t)$$

d'où avec les notations précédentes:

$$K_{m+1}=\sigma_p\left(\frac{\Theta_{p+1}}{\sigma_p}+\frac{1}{pm}\right),\qquad m\geqslant 1.\ (*)$$

3. *Determination des récurrences vérifiées par les suites* $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$

Revenons à la fonction génératrice (I.2.1)

$$G(x,t)=A(t)\,e^{xH(t)}=\sum_{n\geqslant 0}P_n(x)\frac{t^n}{n!}\tag{I.3.1}$$

soit, en dérivant, cette dernière par rapport à t on a:

$$\frac{\partial G}{\partial t}=\left[\frac{A'(t)}{A(t)}+xH'(t)\right]G(x,t).\tag{I.3.2}$$

LEMME I.3.1. *Les fonctions A et H, vérifient respectivement les équations différentielles suivantes*:

$$-\frac{A'(t)}{A(t)}=\frac{S_p(t)\,S'_p(t)}{R_{2p}(t)}\tag{I.3.3}$$

$$H'(t)=\frac{S'_p(t)}{R_{2p}(t)}.\tag{I.3.4}$$

Démonstration. D'après (I.2.8) et (I.2.14), on a:

$$-\frac{A'(J(u))}{A(J(u))}\cdot J'(u)=S_p(J(u))$$

comme $J'(u)\,S'_p(J(u))=R_{2p}(J(u))$, alors:

$$-\frac{A'(J(u))}{A(J(u))}=\frac{S_p(J(u))\,S'_p(J(u))}{R_{2p}(J(u))},$$

c'est-à-dire:

$$-\frac{A'(t)}{A(t)}=\frac{S_p(t)\,S'_p(t)}{R_{2p}(t)},$$

d'où (I.3.3).

De même on a de (I.2.13):

$$J'(H) \cdot S'_p(J(H)) = R_{2p}(J(H)),$$

soit

$$\frac{dH}{dJ} = \frac{S'_p(J(H))}{R_{2p}(J(H))},$$

c'est-à-dire:

$$H'(t) = \frac{S'_p(t)}{R_{2p}(t)}$$

d'où (I.3.4). (*)

THÉORÈME I.3.2. *Les suites de polynômes* $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$, *mises en évidence dans le primier cas, c'est-à-dire lorsque* $R_{2p}(t) = S'_p(t) \sum_{\nu=0}^{p+1} \Theta_\nu t^\nu$, *vérifient la récurrence d'ordre* $(p+1)$ *suivante*:

$$P_{n+1}(x) = \{(x-\sigma_0) - n\Theta_1\} P_n(x) - \sum_{s=1}^{p} [n]_s \{\sigma_s + (n-s)\Theta_{s+1}\} P_{n-s}(x),$$
$$n \geqslant 0 \tag{I.3.5}$$

où $[n]_s = n(n-1)\cdots(n+1-s)$, $s \geqslant 1$ *et la convention* $[n]_s = 0$ *si* $n < s$.

Démonstration. Lorsque $R_{2p}(t) = S'_p(t) \sum_{\nu=0}^{p+1} \Theta_\nu t^\nu$, les relations (I.3.3) et (I.3.4) deviennent respectivement:

$$-\frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{S_p(t)}{\sum_{\nu=0}^{p+1} \Theta_\nu t^\nu} \quad \text{et} \quad H'(t) = \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{p+1} \Theta_\nu t^\nu} \tag{I.3.6}$$

et d'après (I.3.2) on a

$$\frac{\partial G}{\partial t} \cdot \sum_{\nu=0}^{p+1} \Theta_\nu t^\nu = (x - S_p(t)) \cdot G(x, t)$$

soit:

$$\sum_{n\geqslant 0} P_{n+1}(x) \frac{t^n}{n!} \cdot \sum_{\nu=0}^{p+1} \Theta_\nu t^\nu = \left\{x - \sum_{\nu=0}^{p} \sigma_\nu t^\nu\right\} \cdot \sum_{n\geqslant 0} P_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

d'où

$$\sum_{n\geqslant 0} \left\{P_{n+1}(x) + \sum_{s=1}^{p+1} [n]_s \Theta_s P_{n+1-s}(x)\right\} \frac{t^n}{n!}$$
$$= \sum_{n\geqslant 0} \left\{(x-\sigma_0) P_n(x) - \sum_{s=1}^{p} [n]_s \sigma_s P_{n-s}(x)\right\} \frac{t^n}{n!}$$

soit en identifiant, on obtient la relation (I.3.5). (*)

THÉORÈME I.3.3. *Les suites $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ de polynômes, mises en évidence dans le second cas, c'est-à-dire lorsque*

$$R'_{2p}(t)=S'_p(t)\,\hat{S}_p(t) \qquad et \qquad \hat{S}'_p(t)=cS'_p(t)$$

vérifient une récurrence d'ordre 2p, dont les p premiers sont à coefficients polynomiaux de premier degré. Cette récurrence est de la forme

$$\begin{aligned}\sigma_1 P_{n+1}(x)=\sum_{\nu=0}^{p-1}&\left\{(\nu+1)\,\sigma_{\nu+1}x-\left(\frac{c(n-\nu)}{\nu+1}+1\right)\right.\\&\left.\times\sum_{k=0}^{\nu}(k+1)\,\sigma_{k+1}\sigma_{\nu-k}\right\}[n]_\nu P_{n-\nu}(x)\\&-\sum_{\nu=p}^{2p-1}[n]_\nu\left(\frac{c(n-\nu)}{\nu+1}+1\right)\\&\times\left\{\sum_{k=0}^{2p-(\nu+1)}(k+\nu+1-p)\,\sigma_{k+\nu+1-p}\sigma_{p-k}\right\}\\&\times P_{n-\nu}(x), \qquad n\geqslant 0 \end{aligned}\tag{I.3.7}$$

avec $[n]_\nu=n(n-1)\cdots(n+1-\nu)$, $\nu\geqslant 0$ *et les conventions* $[n]_0=1$, $[n]_s=0$, $n<s$.

Démonstration. D'après les relations (I.3.1), (I.3.2), (I.3.3) et (I.3.4), on a:

$$R_{2p}(t)\sum_{n\geqslant 0}P_{n+1}(x)\frac{t^n}{n!}=\{xS'_p(t)-S_p(t)\,S'_p(t)\}\sum_{n\geqslant 0}P_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

et d'après le système (I.2.26), $R_{2p}(t)$ s'écrit:

$$\begin{aligned}R_{2p}(t)=\sigma_1+c\sum_{\nu=0}^{p-1}&\left\{\sum_{k=0}^{\nu}(k+1)\,\sigma_{k+1}\sigma_{\nu-k}\right\}\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1}\\&+c\sum_{\nu=p}^{2p-1}\left\{\sum_{k=0}^{2p-(\nu+1)}(k+\nu+1-p)\,\sigma_{k+\nu+1-p}\sigma_{p-k}\right\}\frac{t^{\nu+1}}{\nu+1}.\end{aligned}$$

En remarquant que $\rho_0=\sigma_1$, en vertu de la relation (I.2.13) et $J'(0)=1$, et d'après (I.2.30), $S'_p(t)\,S_p(t)$ s'écrit:

$$\begin{aligned}S'_p(t)\,S_p(t)=\sum_{\nu=0}^{p-1}&\left\{\sum_{k=0}^{\nu}(k+1)\,\sigma_{k+1}\sigma_{\nu-k}\right\}t^\nu\\&+\sum_{\nu=p}^{2p-1}\left\{\sum_{k=0}^{2p-(\nu+1)}(k+\nu+1-p)\,\sigma_{k+\nu+1-p}\sigma_{p-k}\right\}t^\nu\end{aligned}$$

d'où:

$$\sum_{n\geqslant 0}\left\{\sigma_1 P_{n+1}(x)+c\sum_{v=0}^{p-1}\left[\sum_{k=0}^{v}(k+1)\,\sigma_{k+1}\sigma_{v-k}\right]\frac{[n]_v+1}{v+1}P_{n-v}(x)\right.$$
$$+c\sum_{v=p}^{2p-1}\frac{[n]_v+1}{v+1}\left\{\sum_{k=0}^{2p-(v+1)}(k+1+v-p)\right.$$
$$\left.\left.\times\,\sigma_{k+v+1-p}\sigma_{p-k}\right\}P_{n-v}(x)\right\}\frac{t^n}{n!}$$
$$=\sum_{n\geqslant 0}\left\{\sum_{v=0}^{p-1}[n]_v\left[-\sum_{v=0}^{p}(k+1)\,\sigma_{k+1}\sigma_{v-k}+(v+1)\,\sigma_{v+1}x\right]P_{n-v}(x)\right.$$
$$\left.-\sum_{v=p}^{2p-1}[n]_v\left[\sum_{k=0}^{2p-(v+1)}(k+v+1-p)\,\sigma_{k+v+1-p}\sigma_{p-k}\right]P_{n-v}(x)\right\}\frac{t^n}{n!}$$

soit par identification, on obtient (I.3.7). (*)

Remarque I.3.4. Ces formes de récurrences sont nouvelles, et n'apparaissent pas par exemple dans le cas de l'orthogonalité, c'est-à-dire lorsque $p=1$.

4. *Conclusion*

D'après le théorème (I.3.3), on peut énoncer maintenant le résultat suivant: Une suite $\{P_n(X)\}_{n\geqslant 0}$, de polynômes strictement $1/p$ $(p\geqslant 2)$ orthogonale relativement à une forme linéaire $\mathscr{L}$, ne vérifie pas nécessairement une récurrence d'ordre $p+1$.

II. Etude des polynômes strictement demi-orthogonaux de type A zero

On va utiliser maintenant les résultats de la caractérisation précédente pour faire une étude plus approfondie des suites $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$, lorsque $p=2$, en déterminant toutes les familles de polynômes demi-orthogonales, et en citant quelques résultats extraits de [8].

1. *Étude des polynômes strictement demi-orthogonaux vérifiant une récurrence d'ordre trois*

Corollaire du Théorème I.3.2. *Lorsque $R_4(t)=S_2'(t)\sum_{v=0}^{3}\Theta_v t^v$, les suites de polynômes $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$, vérifient la récurrence d'ordre trois*:

$$\begin{aligned}P_{n+3}(x)=&\{(x-\sigma_0)+(n+2)(\alpha+\beta+\gamma)\}\,P_{n+2}(x)\\&-(n+2)\{\sigma_1+(n+1)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\}\,P_{n+1}(x)\\&-(n+1)(n+2)\{\sigma_2-n\alpha\beta\gamma\}\,P_n(x);\qquad n\geqslant 0\end{aligned}$$

avec les conditions initiales:

$$P_0(x)=1; \quad P_1(x)=(x-\sigma_0); \quad P_2(x)=(x-\sigma_0)^2+(\alpha+\beta+\gamma)(x-\sigma_0)-\sigma_1.$$

PROPOSITION II.1.1. *Il existe neuf familles de polynômes strictement demi-orthogonales vérifiant une récurrence d'ordre trois.*

Démonstration. D'après les relations (I.3.6), on a:

$$H'(t)=\frac{1}{1+\theta_1 t+\theta_2 t^2+\theta_3 t^3} \tag{II.1.1}$$

$$\frac{A'(t)}{A(t)}=-\frac{\sigma_0+\sigma_1 t+\sigma_2 t^2}{1+\theta_1 t+\theta_2 t^2+\theta_3 t^3}. \tag{II.1.2}$$

Soit, en écrivant:

$$1+\theta_1 t+\theta_2 t^2+\theta_3 t^3=(1-\alpha t)(1-\beta t)(1-\gamma t)$$

on distingue les cas suivants:

(A) $\alpha=\beta=\gamma=0$; $(\theta_1=\theta_2=\theta_3=0)$

(B) $\alpha=\beta\neq 0$; $(\gamma=\theta_3=0)$

(C) $\alpha\neq 0$, $\beta=\gamma=0$; $(\theta_1\neq 0,\ \theta_2=\theta_3=0)$

(D) $\alpha\neq\beta\neq 0, \gamma=0$; $(\theta_2\neq 0,\ \theta_3=0)$

D1 α et β sont deux racines réelles

D2 α et β sont deux racines conjuguées

(E) $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$; $(\theta_3\neq 0)$

(F) $\alpha=\beta\neq\gamma$; $(\theta_3\neq 0)$

(G) $\alpha\neq\beta\neq\gamma$; $(\theta_3\neq 0)$

G1 α, β, et γ sont réelles

G2 une racine réelle et deux racines conjuguées.

Déterminons maintenant les couples de fonctions $(H; A)$ dans chacun des cas énumérés ci-dessus en remarquant que $H(0)=0$ et $A(0)=1$.

Pour plus de clarté et d'esprit pratique, ces couples $(H; A)$ seront représentés dans le tableau suivant (tableau I).

Remarque II.1.2. (1°) Les trois suites mises en évidence dans les cas *E*, *F* et *G* sont inédites, et ne se réduisent pas aux polynômes de Meixner lorsque $\sigma_2=0$, [4].

(2°) Par contre, les polynômes mis en évidence dans les cas *A*, *B*, *C* et *D* généralisent respectivement les polynômes de: Hermite, Laguerre, Poisson–Charlier et Euler.

Tableau I

CAS	$H(t)$	$A(t)$
A	t	$\exp\left\{-\left(\sigma_0 t+\frac{\sigma_1}{2}t+\frac{\sigma_2}{3}t^3\right)\right\}$
B	$\frac{t}{1-\alpha t}$	$(1-\alpha t)^{-(1/\alpha^2)(\sigma_2+(2\sigma_2/\alpha))}\exp\left\{-\left[\frac{\sigma_2}{\alpha^2}t+\frac{\sigma_0+(\sigma_1/\alpha)+(\sigma_2/\alpha^2)}{1-\alpha t}t\right]\right\}$
C	$\frac{1}{\alpha}\operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-\alpha t}\right)$	$(1-\alpha t)^{1/\alpha(\sigma_0+(\sigma_1/\alpha)+(\sigma_2/\alpha^2)}\exp\left\{\frac{1}{\alpha}\left(\sigma_1+\frac{\sigma_2}{\alpha}\right)t+\frac{\sigma_2}{2\alpha}t^2\right\}$
D	$\frac{1}{\beta-\alpha}\operatorname{Log}\left(\frac{1-\alpha t}{1-\beta t}\right)$	$e^{-(\sigma_2/\alpha\beta)t}\left\{\frac{(1-\beta t)^{1/\beta(\sigma_0\beta+\sigma_1+(\sigma_2/\beta))(1/(\beta-\alpha))}}{(1-\alpha t)^{1/\alpha(\sigma_0\alpha+\sigma_1+(\sigma_2/\alpha))}}\right\}$
E	$\frac{1}{2}\frac{t(2-t)}{(1-t)^2}$	$(1-\alpha t)^{\sigma_2/\alpha^3}\exp\left\{\left[\frac{\sigma_1}{\alpha}+\frac{2\sigma_2}{\alpha^2}\right]\frac{t}{1-t}-\left[\sigma_0+\frac{\sigma_1}{\alpha}+\frac{\sigma_2}{\alpha^2}\right]\frac{t(1-(\alpha/2)t)}{(1-\alpha t)^2}\right\}$
F	$\frac{\alpha t}{(\alpha-\gamma)}\cdot\frac{1}{1-\alpha t}+\operatorname{Log}\left(\frac{1-\alpha t}{1-\gamma t}\right)^{\gamma/(\alpha-\gamma)^2}$	$(1-\alpha t)^{(\sigma_2/\alpha^2(\gamma-2\alpha)-(\sigma_1-\sigma_0\gamma)/(\alpha-\gamma)^2}(1-\gamma t)^{(\gamma\sigma_0+\sigma_1+(\sigma_2/\gamma))/(\alpha-\gamma)^2}\times\exp\left\{-\left[\frac{\alpha\sigma_0+\sigma_1+(\sigma_2/\alpha)}{\alpha-\gamma}\right]\cdot\frac{1}{1-\alpha t}\right\}$
G	$\operatorname{Log}\{(1-\alpha t)^{-\alpha/((\alpha-\beta)(\alpha-\gamma))}\times(1-\beta t)^{-\beta/((\beta-\alpha)(\beta-\gamma))}\times(1-\gamma t)^{-\gamma/((\gamma-\alpha)(\gamma-\beta))}\}$	$(1-\alpha t)^{(\alpha\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2\alpha^{-1})/(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\times(1-\beta t)^{(\beta\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2\beta^{-1})/((\beta-\alpha)(\beta-\gamma))}\times(1-\gamma t)^{(\alpha\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2\gamma^{-1})/((\gamma-\alpha)(\gamma-\beta))}$

(3°) On peut démontrer que les suites de polynômes mises en évidence dans les cas A, B, C, D et E vérifient soit:

—une équation différentielle d'ordre 3 où

—une équation aux différences finies d'ordre 3, voir [8],

qu'on récapitulera dans le tableau suivant (tableau II).

Remarque II.1.3. L'équation aux différences finies vérifiée par la suite de polynômes dans le cas D, généralise celle obtenue par Meixner [4] dans le cas de l'orthogonalité.

2. *Étude des polynômes strictement demi-orthogonaux vérifiant une récurrence d'ordre quatre*

Corollaire du Théorème I.3.3. *Lorsque* $R'_4(t)=S'_2(t)\,\hat{S}_2(t)$ *et* $\hat{S}'_2(t)=$

Tableau II

CAS	Equation différentielle "ou aux différences finies"
A	$\sigma_2 P_n^{(3)} + \sigma_1 P_n'' - (x-\sigma_0) P_n' + nP_n = 0;\quad n \geqslant 0$
B	$\{\alpha^2(x-\sigma_0) - \alpha\sigma_1 - \sigma_2\} P_n^{(3)}(x) + \{2\alpha(x-\sigma_0) - \sigma_1 + \alpha^2\} P_n''(x)$ $+ \{(x-\sigma_0) - (n-1)\alpha\} P_n'(x) - nP_n(x) = 0;\quad n \geqslant 0$
C	$\{\alpha^2(x-\sigma_0) - \alpha\sigma_1 - \sigma_2 + 2\alpha^3\} \Delta_\alpha^3 P_n(x) + \{2\alpha(x-\sigma_0) - \sigma_1 + (4-n)\alpha^2\} \Delta_\alpha^2 P_n(x)$ $+ \{(x-\sigma_0) + 2(1-n)\alpha\} \Delta_\alpha P_n(x) - nP_n(x) = 0;\quad n \geqslant 0$
D	$\{\alpha^2(x-\sigma_0) - \alpha\sigma_1 + \sigma_2 + 2\alpha^2(\alpha-\beta)\} \Delta_{\alpha-\beta}^3 P_n(x)$ $+ \{2\alpha(x-\sigma_0) - \sigma_1 + \alpha[(4-n)\alpha + (n-3)\beta]\} \Delta_{\alpha-\beta}^2 P_n(x)$ $+ \{(x-\sigma_0) + (1-n)(2\alpha-\beta)\} \Delta_{\alpha-\beta} P_n(x) - nP_n(x) = 0; n \geqslant 0$
E	$h_3(x,n) P_n^{(3)}(x) + 4h_2(x,n) P_n''(x) + 2\alpha h_1(x,n) P_n'(x) - n\alpha P_n(x) = 0$

$CS_2'(t)$, les suites de polynômes $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ vérifient la récurrence d'ordre quatre

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x) = {} & \{(x-\sigma_0) - nc\} P_n(x) \\
& + n\left\{2\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\sigma_0) - \sigma_1 - \frac{(n-1)}{2} c\left(\sigma_1 + \frac{2\sigma_2\sigma_0}{\sigma_1}\right)\right\} P_{n-1}(x) \\
& - n(n-1)\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\sigma_1 + 2\sigma_0)\left(1 + \frac{n-2}{3} c\right) P_{n-2}(x) \\
& - 2n(n-1)(n-2)\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1}\left(1 + \frac{n-3}{4} c\right) P_{n-3}(x), \qquad n \geqslant 0
\end{aligned}$$

et $P_0(x) = 1$.

PROPOSITION II.2.1. *Il existe cinq familles de polynômes strictement demi-orthogonales vérifiant une récurrence d'ordre quatre.*

Démonstration. D'après la relation (I.2.34), $R_4(t)$ s'écrit de la manière suivante:

$$R_4(t) = \sigma_1\left\{\frac{c}{2}\sigma_1 t^2\left(1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} t\right)^2 + \chi_0 t\left(1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} t\right) + 1\right\} \tag{II.2.1}$$

et les relations (I.3.3) et (I.3.4) nous donnent

$$H'(t) = \frac{1 + 2(\sigma_2/\sigma_1)\, t}{(c/2)\,\sigma_1 t^2(1 + (\sigma_2/\sigma_1)\, t)^2 + \chi_0 t(1 + (\sigma_2/\sigma_1)\, t) + 1} \tag{II.2.2}$$

$$\frac{A'(t)}{A(t)} = -\frac{(1 + 2(\sigma_2/\sigma_1))\, t)(\sigma_0 + \sigma_1 t + \sigma_2 t^2)}{(c/2)\,\sigma_1 t^2(1 + (\sigma_2/\sigma_1)\, t)^2 + \chi_0 t(1 + (\sigma_2/\sigma_1)\, t) + 1}. \tag{II.2.3}$$

Soit en posant $z = t(1 + (\sigma_2/\sigma_1)\, t)$, on obtient:

$$\frac{c}{2}\sigma_1 z^2 + \chi_0 z + 1 = (1 - z_1 z)(1 - z_2 z),$$

avec

$$z_1 + z_2 = -\chi_0 \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{2}\sigma_1. \tag{II.2.4}$$

De même, on peut écrire:

$$1 - z_1 z = 1 - z_1 t - z_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} t^2 = (1 - \xi_1 t)(1 - \eta_1 t)$$

$$1 - z_2 z = 1 - z_2 t - z_2 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} t^2 = (1 - \xi_2 t)(1 - \eta_2 t),$$

où

$$\xi_1 + \eta_1 = z_1; \qquad \xi_2 + \eta_2 = z_2$$

$$\xi_1 \eta_1 = -z_1 \frac{\sigma_2}{\sigma_1}; \qquad \xi_2 \eta_2 = -z_2 \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Ainsi on a:

$$\frac{c}{2}\sigma_1 t^2 \left(1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} t\right)^2 + \chi_0 t \left(1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} t\right) + 1$$
$$= (1 - \xi_1 t)(1 - \eta_1 t)(1 - \xi_2 t)(1 - \eta_2 t) \tag{II.2.5}$$

Tableau III

CAS	$H(t)$	$A(t)$
K	$t + \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} t^2$	$\exp\left\{-\dfrac{\sigma_1}{2} H^2(t) - \sigma_0 H(t)\right\}$
L	$\dfrac{t + (\sigma_2/\sigma_1)\, t^2}{(1 - \xi_1 t)(1 - \eta_1 t)}$	$(1 + z_1 H(t))^1/z_1^2 \exp\left\{-\left(\dfrac{\sigma_1}{z_1} + \sigma_0\right) H(t)\right\}$
M	$-\dfrac{1}{z_1} \operatorname{Log}\{(1 - \xi_1 t)(1 - \xi_2 t)\}$	$\exp\left\{\dfrac{\sigma_1}{z_1^2} - \left(\dfrac{\sigma_1}{z_1} + \sigma_0\right) H(t) - \dfrac{\sigma_1}{z_1^2} e^{-z_1 H(t)}\right\}$
N	$\dfrac{1}{z_1 - z_2} \operatorname{Log} \times \left\{\dfrac{(1 - \xi_2 t)(1 - \eta_2 t)}{(1 - \xi_1 t)(1 - \eta_1 t)}\right\}$	$\left(\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 e^{-z_2 H(t)} - z_2 e^{-z_1 H(t)}}\right)^{-\sigma_1/z_1 z_2} \exp(-\sigma_0 H(t))$

Tableau IV

CAS	Equation différentielle
K	$4\sigma_2\sigma_1 P_n^{(4)}(x)-(8\sigma_2 x-\sigma_1^2)P_n^{(3)}(x)+2\left\{2\frac{\sigma_2}{\sigma_1}x^2-\sigma_1 x+(2n-3)\sigma_2\right\}P_n^4(x)$ $+\left\{x^2-2(2n-1)\frac{\sigma_2}{\sigma_1}x+(n-1)\sigma_1\right\}P'_n(x)-n\left\{x-(n+1)\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right\}P_n(x)=0,\ n\geqslant 0$
L	$g_4(x)P_n^{(4)}(x)+g_3(x)P_n^{(3)}(x)+g_2(x,n)P''_n(n)+g_1(x,n)P'_n(x)$ $+g_0(x,n)P_n(x)=0,\quad n\geqslant 0$

ce qui nous donne les cas suivants:

(K) $c=\chi_0=0$; $(\xi_1=\eta_1=\xi_2=\eta_2=0)$

(L) $c\neq 0$, $c\neq -2/m$, $m\geqslant 1$, $z_1=z_2$ et $\xi_1\neq\eta_1$

(M) $c=0$, $\chi_0\neq 0$, $(\xi_2=\eta_2=0)$ et $\xi_1\neq\eta_1$

(N) $c\neq 0$, $c\neq -2/m$, $m\geqslant 1$ et $z_1\neq z_2$

N1 z_1 et z_2 sont réelles

N2 z_1 et z_2 sont complexes. (*)

Remarque II.2.5. On n'a pas considéré les cas où $\xi_1=\eta_1$ car on se ramène à l'un des cas paragraphe précédent.

Déterminons maintenant les couples de fonctions $(H; A)$ dans les cas cités ci-dessus, qu'on représentera dans le tableau (tableau III).

Remarque II.2.3. On peut démontrer [8] que les suites mises en évidence dans les cas K et L vérifient respectivement une équation différentielle d'ordre 4 (tableau IV).

3. *Détermination des fonctions poids pour les suites* $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$

Notons par $\psi(x)$, la fonction poids lorsqu'elle existe pour la suite des polynômes $\{P_n(x)\}$, alors on a:

Tableau V

K	$A(J(H))^{-1}=e^{(\sigma_1/2)H^2+\sigma_0 H}$
L	$A(J(H))^{-1}=(1+z_1H)^{-\sigma_1/z_1^2}e^{((\sigma_1/z_1)+\sigma_0)H}$
M	$A(J(H))^{-1}=\exp\left\{\frac{\sigma_1}{z_1^2}(z_1H-1+e^{z_1H})+\sigma_0 H\right\}$
N	$A(J(H))^{-1}=\exp(\sigma_0 H)\times\left(\frac{z_1-z_2}{z_1e^{z_2H}-z_2e^{z_1H}}\right)^{\sigma_1/z_1z_2}$

Tableau VI

CAS	$A(J(H))^{-1}$	Fonction poids	Equation differentielle
I	$e^{(\sigma_1/2)H^2}$	$\psi'(x)=e^{-x^2/2\sigma_1}$	$AP_n^{(4)}+B(x)\,P_n^{(3)}$ $+C(x,n)\,P_n''+D(x,n)\,P_n'$ $+D(x,n)\,P_n'+E(x,n)\,P_n=0$
III.A	$e^{(\sigma_1/Z_1)H}(1+Z_1H)^{-\sigma_1/Z_1^2}$	$\underline{Z_1>0}$: $\psi'(x)=\begin{cases}(-x+(\sigma_1/Z_1))^{-1-(\sigma_1/Z_1^2)}e^{x/Z_1}; & -\infty<x<-\sigma_1/Z_1\\ 0; & -\sigma_1/Z_1<x<+\infty\end{cases}$ $\underline{Z_1<0}$: $\psi'(x)=\begin{cases}0; & -\infty<x<-\sigma_1/Z_1\\ (x-\sigma_1/Z_1)^{-1-(\sigma_1/Z_1^2)}\,e^{x/Z_1}; & -\sigma_1/Z_1<x<\infty\end{cases}$	$g_4(x,n)\,P_n^{(4)}+g_3(x,n)\;P_n^{(3)}$ $+g_2(x,n)\,P_n''+g_1(x,n)\,P_n'$ $+g_0(x,n)\,P_n=0$
II	$\exp\left\{\dfrac{\sigma_1}{Z_1^2\,(Z_1H-1}+e^{-Z_1H})\right\}$	$\psi(x)=\text{cste sauf } x_n=+\dfrac{\sigma_1}{Z_1}-Z_1n\quad(n=0,1,\ldots)$ $\psi(x_n+0)-\psi(x_n-0)=\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\sigma_1}{Z_1^2}\right)^n$	
IV.B	$\left\{\dfrac{Z_1-Z_2}{Z_1e^{-Z_2H}-Z_2^{-Z_1H}}\right\}^{\sigma_1/Z_1Z_2}$	$-\underline{B1}-$ Soit $\lvert Z_1\rvert>\lvert Z_2\rvert$ $\psi(x)=\text{cste, sauf } x_n=-\dfrac{\sigma_1}{Z_1}-(Z_1-Z_2)\,n,\ (n=0,1,\ldots)$ $\psi(x_n-0)-\psi(x_n-0)=\left(-\dfrac{Z_2}{Z_1}\right)^n\cdot\begin{pmatrix}k_2/Z_1Z_2\\ n\end{pmatrix}$ $-\underline{B2}-$ Soit $\mathrm{Im}(Z_1)>\mathrm{Im}(Z_2)$ $\psi'(x)=\left(-\dfrac{Z_2}{Z_1}\right)^{x/(Z_1-Z_2)}\Gamma\left(\dfrac{x}{Z_2-Z_1}+\dfrac{\sigma_1}{Z_2(Z_2-Z_1)}\right)$ $\times\Gamma\left(\dfrac{x}{Z_1-Z_2}+\dfrac{\sigma_1}{Z_1(Z_1-Z_2)}\right);\ -\infty<x<\infty;\ \left\lvert\arg\left(-\dfrac{Z_2}{Z_1}\right)\right\rvert<\pi$	

LEMME II.3.1. *La fonction poids $\psi(x)$, lorsqu'elle existe vérifie la relation*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xH}\, d\psi(x) = \frac{1}{A(J(H))} \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi(x). \tag{II.3.1}$$

Démonstration. En multipliant la relation (I.2.1) par $\psi(x)$ et en intégrant dans l'intervalle $-\infty < x < \infty$, on a:

$$\begin{aligned} A(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xH(t)}\, d\psi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n\geqslant 0} P_n(x) \frac{z^n}{n!}\, d\psi(x) \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)\, d\psi(x) \right\} \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)\, d\psi(x) = 0, \qquad n \geqslant 1$$

car la suite $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ est strictement demi-orthogonale alors,

$$A(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xH(t)}\, d\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi(t),$$

soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xH}\, d\psi(x) = \frac{1}{A(J(H))} \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi(x). \; (*)$$

Remarques II.3.2. (1°) D'après la relation (II.3.1), on constate que la fonction poids dépend de la nature de la fonction A, ce qui donne comme fonction pour chacun des cas précédents (tableau V).

(2°) Les fonctions $A(J(H))^{-1}$ obtenues dans chacun des cas précédents, sont exactement celles obtenues par Meixner [4] dans le cas des suites orthogonales.

(3°) En considérant donc $\sigma_1 > 0$ (et en prenant $\sigma_0 = 0$, ce qui est toujours possible, on obtient les mêmes fonctions qu'on récapitule dans le tableau précédent (tableau VI).

REFERENCES

1. M. G. DE BRUIN, Convergence of generalized *C*. fraction, *J. Approx. Theory* **24** (1978), 177–207.
2. J. VAN ISEGHEM, Vector Padé approximants, à paraître.

3. M. G. DE BRUIN, Simultaneous Padé approximation and orthogonality, *in* "Polynômes orthogonaux et applications" (C. Brezinski et coll., Eds.), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1171, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1985.
4. J. MEIXNER, Orthogonale Polynomsysteme mit einen besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion, *J. London Math. Soc.* **9** (1934), 6 – 13.
5. H. L. KRALL ET I. M. SHEFFER, A caracterization of orthogonal polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* **8** (1964), 232–244.
6. P. MARONI, Une généralisation du théorème de Favard–Shohat sur les polynômes orthogonaux, *C R. Acad. Sci. Paris* **293** (1981), 19–22.
7. I. M. SHEFFER, Some properties of polynomial sets of type zero, *Duke Math. J.* **5** (1939), 590–622.
8. A. BOUKHEMIS, Étude de quelques familles particulières de polynômes demi-orthogonales, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1985.